3 მათემატიკური ინდუქცია და მისი გამოყენება

3.1 მათემატიკური ინდუქცია

განვიხილოთ კენტ რიცხვთა მიმდევრობა:

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, ...$
ცხადია, რომ ამ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი შემდეგნაირად ჩაიწერება: $a_i = 2 \cdot i - 1$. ახლა კი გამოვიანგარიშოთ ამ მიმდევრობის პირველი n წევრის ჯამი:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

აღსანიშნავია, რომ პირველი n კენტი რიცხვის ჯამი რეკურსიულად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

(პირველი $n-1$ კენტი რიცხვის ჯამს მიმატებული მე-n-ე კენტი რიცხვი).

<u>სავარჯიშო 3.1:</u> რეკურსიულად ჩაწერეთ $S_{n+1}, S_{n-1}, S_{n-2}$ და S_{n-3}.

პირველ რიგში განვიხილოთ რამოდენიმე კონკრეტული მაგალითი:

$$\begin{array}{lll} S_1 = & a_1 & = & 1 \\ S_2 = & a_1 + a_2 & = & 4 \\ S_3 = & a_1 + a_2 + a_3 & = & 9 \\ S_4 = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = & 16 \\ S_5 = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 & = & 25 \\ \cdots \end{array}$$

თუ ამ ცხრილის მარჯვენა მხარეს დავაკვირდებით, დავინახავთ, რომ იქ ნატურალური რიცხვების კვადრატები წერია: $S_1 = 1^2, S_2 = 2^2, S_3 = 3^2, S_4 = 4^2, S_5 = 5^2$.
ეს გვაწვდის პირველ მოსაზრებას იმის შესახებ, თუ რისი ტოლი შეიძლება იყოს ზოგადად პირველი n კენტი რიცხვის ჯამი: $S_i = i^2$.
მაგრამ ეს მხოლოდ მოსაზრებაა, რომელსაც დამტკიცება სჭირდება. ეს მოსაზრება თვით მილიონი მაგალითის გადამოწმებით ვერ დამტკიცდება: მილიონ მეერთე მაგალითი *შეიძლება* ამ მოსაზრებას არ აკმაყოფილებდეს. ასე რომ, საჭიროა რაღაცა ზოგადი მეთოდი, რომლითაც ასეთ რამეებს დავამტკიცებთ.
სწორედ ასეთი ზოგადი მეთოდია ე.წ. **მათემატიკური ინდუქციის** მეთოდი, რომელიც შემდეგი სამი ბიჯისაგან შედგება:

1. **ინდუქციის შემოწმება:** გადავამოწმოთ მოსაზრება $n = 1$ შემთხვევისათვის;
2. **ინდუქციის დაშვება:** დავუშვათ, რომ მოსაზრება ჭეშმარიტია $\forall k = 1, 2, ..., n$;
3. **ინდუქციის ბიჯი:** დავამტკიცოთ მოსაზრება $n + 1$-თვის.

ამ სამი ბიჯის შესრულებისას შემდეგს მივაღწევთ: თუ მოსაზრება ჭეშმარიტია $n = 1$-თვის, მე-2-ე ბიჯში ჩავსვავთ $n = 1$. თუ მოსაზრება ჭეშმარიტია აგრეთვე $n+1$-თვის (მესამე პუნქტი), იგი ჭეშმარიტია 2-თვის. ესე იგი, შეიძლება მეორე პუნქტში ჩავსვათ $n = 2$ და, მესამე პუნქტიდან გამომდინარე, მოსაზრება ჭეშმარიტია $n + 1 = 2 + 1 = 3$ -თვის. ანალოგიური მსჯელობით დავამტკიცებთ ჭესმარიტებას $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$... შემთხვევებში, რითაც ეს მოსაზრება ნებისმიერი ნატურალური n -თვის ჭეშმარიტი იქნება.

ჩვენს ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ეს ასე იქნება:

1. **ინდუქციის შემოწმება:** $n = 1$: $S_1 = 1^2 = 1$;

2. **ინდუქციის დაშვება:** დავუშვათ, რომ $S_n = n^2$;

3. **ინდუქციის ბიჯი:** დავამტკიცოთ $S_{n+1} = (n+1)^2$.
რეკურსიული ფორმულის თანახმად, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + 2 \cdot (n+1) - 1 = S_n + 2 \cdot n + 1$.
ინდუქციის დაშვების თანახმად $S_n = n^2$ და ზედა ფორმულაში ჩასმით ვიღებთ: $S_{n+1} = n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2$.
მოსაზრება დამტკიცებულია.

როდესაც რეკურსიული ფორმულა ჩაიწერება არარეკურსიული სახით (ანუ ფორმულაში მხოლოდ ცვლადები და მუდმივები გვხვდება), ამბობენ, რომ რეკურსია გაიშალა და ფორმულა ჩაიწერა არარეკურსიული სახით.

ზემოთ აღწერილი პრინციპით დავამტკიცოთ კიდევ ერთი მათემატიკური მოსაზრება:

რეკურსიული ტოლობით მოცემულია მიმდევრობა $S_1 = 1, S_n = S_{n-1} + n$. დაამტკიცეთ, რომ $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

1. **ინდუქციის შემოწმება:** $n = 1$: $S_1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$;

2. **ინდუქციის დაშვება:** $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$;

3. **ინდუქციის ბიჯი:** დავამტკიცოთ $S_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$..
რადგან $S_{n+1} = S_n + (n+1)$, ამიტომ, ინდუქციის დაშვების თანახმად, $S_{n+1} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$.

სავარჯიშო 3.2: მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი კენტი რიცხვი შემდეგი ფორმულით ჩაიწერება: $a_i = 2 \cdot i - 1$.

სავარჯიშო 3.3: მოცემულია რეკურსიული ტოლობა $S_1 = 3$, $S_n = S_{n-1} + n$. გახსენით რეკურსია (ტოლობა ჩაწერეთ არარეკურსიული სახით).

სავარჯიშო 3.4: მოცემულია რეკურსიული ტოლობა $K_1 = 7$, $K_n = K_{n-1} + 2n$. გახსენით რეკურსია (ტოლობა ჩაწერეთ არარეკურსიული სახით).

სავარჯიშო 3.5: მოცემულია რეკურსიული ტოლობა $P_1 = 1$, $P_n = P_{n-1} + 2^n$. გახსენით რეკურსია (ტოლობა ჩაწერეთ არარეკურსიული სახით).

სავარჯიშო 3.6: მოცემულია რეკურსიული ტოლობა $L_1 = 7$, $L_n = 2 \cdot L_{n-1}$. გახსენით რეკურსია (ტოლობა ჩაწერეთ არარეკურსიული სახით).

3.2 მათემატიკური ინდუქციის გამოყენება

განვიხილოთ წინა თავში მოყვანილი ნავების ალგორითმის რეკურსიული ჩანაწერი $A_n = A_1, U, A_n$. მათემატიკური ინდუქციით შეიძლება მისი სისწორის მტკიცება:

- ინდუქციის დასაწყისი: A_1 ალგორითმი სწორია (ამის გადამოწმება ადვილია);
- ინდუქციის დაშვება: დავუშვათ, A_n ალგორითმი სწორია რაღაცა n ნატურალური რიცხვისათვის (და მასზე პატარა ყველა რიცხვისათვის);
- ინდუქციის ბიჯი: დავამტკიცოთ, რომ $A_{n+1} = A_1, U, A_n$ სწორია.

თუ დავამტკიცებთ, რომ A_{n+1} ალგორითმი სწორია და გვეცოდინება, რომ A_1 სწორია, მაშინ დავუშვებთ, რომ $n = 1$ და ამით დამტკიცდება, რომ $A_{n+1} = A_2$ სწორია. თუ A_2 სწორია და დავამტკიცებთ, რომ A_{n+1} სწორია, დამტკიცდება, რომ A_3 სწორია და ა.შ. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის.

ახლა კი დავამტკიცოთ $A_{n+1} = A_1, U, A_n$ ალგორითმის სისწორე: A_1, U ალგორითმების შესრულების შემდეგ წარმოიშვება ზუსტად ისეთივე სიტუაცია, როგორც n ნავის გაყვანის ამოცანაში. ხოლო ინდუქციის დაშვების

თანახმად A_n ალგორითმი n ნავის გაყვანის ამოცანას სწორად ხსნის. ასე რომ, A_1, U, A_n $n+1$ ნავის გაყვანის ამოცანას სწორად ხსნის.

Q.E.D.

სავარჯიშო 3.7: სწორად ამოხსნის თუ არა შემდეგი ალგორითმი $A_n = A_{n-1}, U, A_1$ n ნავის გაყვანის ამოცანას?

ალგორითმის სისწორის მტკიცების შემდეგ საჭიროა მისი სისწრაფის, ანუ ბიჯების რაოდენობის დადგენა. A ალგორითმის ბიჯების რაოდენობას შემდეგნაირად აღნიშნავენ: $T(A)$. ჩვენს შემთხვევაში გვექნება $T(A_n)$. რადგან ჯერ უნდა შევასრულოთ ალგორითმი A_1, ამის შემდეგ ალგორითმი U და ბოლოს ალგორითმი A_{n-1}, მაშინ A_n ალგორითმის ბიჯების რაოდენობა იქნება: $T(A_n) = T(A_1) + T(U) + T(A_{n-1})$ (ჯერ იმდენი, რამდენიც საჭიროა A_1 ალგორითმისათვის, შემდეგ იმდენი, რამდენიც საჭიროა U ალგორითმისათვის და ბოლოს იმდენი, რამდენიც საჭიროა A_{n-1} ალგორითმისათვის).
ეს ფორმულაც ჩაწერილია რეკურსიული სახით, რადგან იგი თავის თავს იყენებს, მხოლოდ უფრო დაბალი პარამეტრებით. მაგრამ მისი ჩაწერა არარეკურსიული სახითაც შეიძლება:

ჩვენ ვიცით, რომ $T(A_1) = 3$ და $T(U) = 1$ (შესაბამისი ალგორითმების გადამოწმებით ამაში ადვილად ვრწმუნდებით). აქედან გამომდინარე, ვიღებთ:

$$T(A_n) = T(A_{n-1}) + 4.$$

თავის მხრივ, $T(A_{n-1}) = T(A_{n-2}) + 4$, $T(A_{n-2}) = T(A_{n-3}) + 4$ ...

აქედან გამომდინარე,

$$T(A_n) = T(A_{n-1}) + 1 \cdot 4 = T(A_{n-2}) + 2 \cdot 4 = T(A_{n-3}) + 3 \cdot 4 = \cdots = T(A_1) + (n-1) \cdot 4 = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4 \cdot n - 1.$$

სავარჯიშო 3.8: დაამტკიცეთ, რომ ამაზე უფრო სწრაფი ალგორითმი ვერ იარსებებს.

ანალოგიურად შეიძლება ჰანოის კოშკების $H_n^{X_1,X_2}$ ალგორითმის სისწორის მტკიცება და ბიჯების რაოდენობის გამოთვლა:

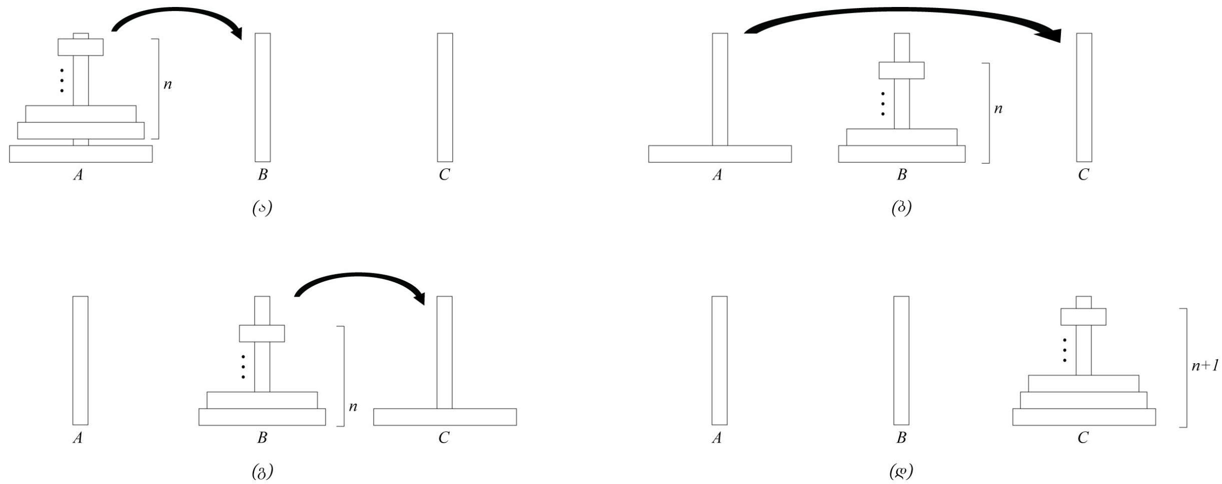
$H_n^{X_1,X_2} = H_{n-1}^{X_1,X_3}, H_1^{X_1,X_2}, H_{n-1}^{X_3,X_2}$.

- ინდუქციის დასაწყისი: $H_1^{X_1,X_2}$ ალგორითმი სწორია (ამის გადამოწმება ადვილია);
- ინდუქციის დაშვება: დავუშვათ, $H_n^{X_1,X_2}$ ალგორითმი სწორია რაღაცა n ნატურალური რიცხვისათვის (და მასზე პატარა ყველა რიცხვისათვის);
- ინდუქციის ბიჯი: დავამტკიცოთ, რომ $H_{n+1}^{X_1,X_2} = H_n^{X_1,X_3}, H_1^{X_1,X_2}, H_n^{X_3,X_2}$. სწორია.
  პირველ რიგში $H_n^{X_1,X_3}$ ალგორითმით X_1 ძელიდან ზედა n რგოლი X_3 ძელზე უნდა გადავიტანოთ (ნახ. 26(ა)). ინდუქციის დაშვების თანახმად ეს პროცედურა სცორად შესრულდება (აქ გასათვალისცინებელია, რომ X_1 ძელზე ყველაზე დიდი რგოლი რჩება, რომელზეც ყველა დანარჩენი რგოლის დადება შეიძლება, რაც ამოცანის შეძღუდვას არ არღვევს. შემდეგ X_1 ძელზე დარჩენილ დიდ რგოლს გადავიტანთ X_3 ძელზე (ნახ. 26(ბ)), რის შემდეგაც $H_n^{X_3,X_2}$ ალგორითმით n რგოლს გადავიტანთ X_3 ძელიდან X_2 ძელზე (ნახ. 26(გ)). აქაც უნდა გავითვალისცინოთ, რომ, ინდუქციის დაშვების თანახმად, $H_n^{X_3,X_2}$ ალგორითმი ყველა წესის დაცვით მოქმედებს და X_2 ძელზე ყველაზე დიდი რგოლი დევს, რომელზედაც ნებისმიერი სხვა რგოლის დადება შეიძლება. შედეგად მივიღებთ $n+1$ რგოლს მესამე ძელზე (ნახ. 26(დ))

იმისათვის, რომ დავადგინოთ, თუ რამდენ ბიჯს ანდომებს ეს ალგორითმი, განვიხილოთ მისი რეკურსიული ჩანაწერი:

$H_n^{X_1,X_2} = H_{n-1}^{X_1,X_3}, H_1^{X_1,X_2}, H_{n-1}^{X_3,X_2}$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ



ნახ. 26: $n+1$ რგოლიანი პირამიდის გადატანისათვის საჭირო ოპერაციები

$T(H_n^{X_1,X_2}) = T(H_{n-1}^{X_1,X_3}) + T(H_1^{X_1,X_2}) + T(H_{n-1}^{X_3,X_2})$.

<u>სავარჯიშო 3.9:</u> რას აღნიშნავს $T(H_{n+3}^{A,C}))$, $T(H_3^{C,B}))$, $T(H_7^{A,C}))$?
<u>სავარჯიშო 3.10:</u> რისი ტოლია $T(H_1^{A,C})$ და $T(H_2^{A,C})$?
<u>სავარჯიშო 3.11:</u> დაამტკიცეთ, რომ $T(H_1^{A,C}) = T(H_1^{B,C})$ და ზოგადად: $T(H_n^{X_1,X_2}) = T(H_n^{Y_1,Y_2})$ $\forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \{A,B,C\}$ და $X_1 \neq X_2$, $Y_1 \neq Y_2$ (არ აქვს მნიშვნელობა, რომელი ძელიდან რომელზე გადავაწყობთ პირამიდას - ბიჯების რაოდენობა უცვლელია).

რადგან $H_n^{X_1,X_2} = H_{n-1}^{X_1,X_3}, H_1^{X_1,X_2}, H_{n-1}^{X_3,X_2}$, ჯერ უნდა შესრულდეს $H_{n-1}^{X_1,X_3}$, შემდეგ $H_1^{X_1,X_2}$ და ბოლოს $H_{n-1}^{X_3,X_2}$. აქედან გამომდინარე,

$$T(H_n^{X_1,X_2}) = T(H_{n-1}^{X_1,X_3}) + T(H_1^{X_1,X_2}) + T(H_{n-1}^{X_3,X_2}) = 2 \cdot T(H_{n-1}^{X_1,X_2}) + 1$$

(იხ. წინა სავარჯიშოები).

<u>სავარჯიშო 3.12:</u> მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ:

$$T(H_n^{X_1,X_2}) = 2^n - 1.$$

3.3 ფიბონაჩის მიმდევრობა

ცნობილმა იტალიელმა მეცნიერმა ლეონარდო და პიზამ (Leonardo da Pisa), რომელიც მეთორმეტე საუკუნის ბოლოსა და მეცამეტე საუკუნის დასაწყისში ცხოვრობდა და უფრო ***ფიბონაჩის*** სახელითაა ცნობილი (Fibonacci), შემდეგი ამოცანის გადაჭრა გადაწყვიტა:

გლეხი ზრდის კურდღლებს. ყოველი კურდღელი ბადებს ერთ კურდღელს, როდესაც ორი თვის გახდება და შემდეგ თითო კურდღელს ყოველთვიურად. რამდენი ***ღდღალი*** კურდღელი ეყოლება გლეხს n თვეში, თუ ჩავთვლით, რომ კურდღლები არ კვდებიან?

თუ n მცირეა, რაოდენობის გამოთვლა არაა რთული: პირველ და მეორე თვეში მას 1 კურდღელი ჰყავს, რადგან კურდღელი მხოლოდ ორი თვის შემდეგ იძლევა შთამომავლობას. მესამე თვეს მას 2 კურდღელი ეყოლება, ხოლო მეოთხეში კი 3, რადგან პირველმა კურდღელმა მისცა კიდევ 1 და მეორე ჯერ ორი თვის არაა. ამის შემდეგ მისი პირველი და მეორე კურდღელი ორივე შთამომავლობას იძლევა, ასე რომ, მეხუთე თვეში მას 5 კურდღელი ეყოლება. ზოგადად, მე-n-ე თვეში ახლად შემომატებულ კურდღელთა რიცხვი ტოლია იმ კურდღელთა რიცხვისა,

რომლებიც სულ ცოტა 2 თვის არიან. ასე რომ, თუ მე-n-ე თვეში კურდღელთა რაოდენობას აღვნიშნავთ როგორც F_n, მივიღებთ:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

(ამ ტოლობას ფიბონაჩის პირობასაც უწოდებენ).

ჩვენ ვიცით აგრეთვე, რომ $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 3, F_4 = 5$. ტექნიკური მიზეზებით განსაზღვრავენ აგრეთვე $F_0 = 0$, რაც შემდეგნაირად განსაზღვრავს ე.წ. ფიბონაჩის მიმდევრობას:

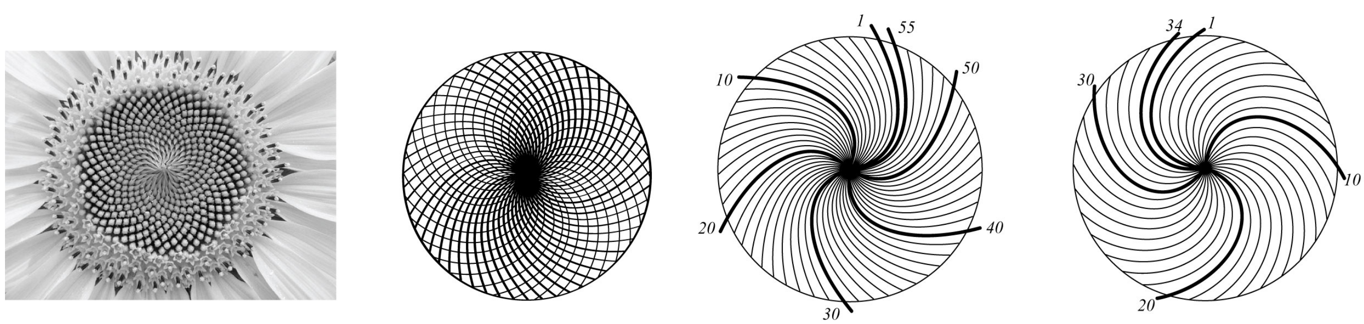
$$F_0 = 0;\ F_1 = 1;\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

სადაც $n > 1$. ამ რეკურსიული ფორმულით გამოთვლილი რამოდენიმე რიცხვია:

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, \ldots$

ასეთი სახით მიღებულ რიცხვებს ფიბონაჩის რიცხვებს უწოდებენ, ხოლო ამ მიმდევრობას -- ფიბონაჩის მიმდევრობას. ამას გარდა, F_n და F_{n+1} მეზობელი რიცხვებია.

აღსანიშნავია, რომ ეს მიმდევრობა ანტიკური ხანის საბერძნეთსა და შუა საუკუნეების ინდოეთშიც იყო ცნობილი.
ზოგჯერ მის ნულოვან წევრს $F_0 = 0$ არ განიხილავენ ხოლმე და მის პირველ ორ წევრად F_1 და F_2 იღებენ.
როგორც ამოჩნდა, ზემოთ მოყვანილი ფორმულა კურდღელთა რაოდენობას არასწორად ითვლის, მაგრამ სამაგიეროდ ფიბონაჩის რიცხვები ძალიან ხშირად გვხვდება ბუნებაში და მეცნიერებაშიც დიდ როლს თამაშობენ. თვით ეს მიმდევრობაც ბევრ საინტერესო თვისებას ავლენს.
ასე, მაგალითად, მზესუმზირას ნაყოფში თესლი განთავსებულია მომრგვალებულ წირებზე, რომელთა სქემაც ქვედა ნახატშია მოყვანილი (ნახ. 27).



ნახ. 27: მზესუმზირას ნაყოფში თესლის განთავსება

ამ ნახაზებიდან ჩანს, რომ თესლი ორი საპირისპიროდ მიმართული ფიგურის მსგავსადაა განლაგებული, სადაც წირების რაოდენობებია 55 და 34, რაც ორი მეზობელი ფიბონაჩის რიცხვია.
ამას გარდა, ხეებში ტოტების განშტოებისა ან ყვავილების ფურცლების რიცხვი ძირითადად ფიბონაჩის მიმდევრობის ერთ-ერთი წევრის ტოლია ხოლმე (მრავლად მოიძებნება ყვავილი ან მცენარე 3, 5, 8, 13 ფურცლით, მაგრამ გამონაკლისია 4, 6, 7 ან 9 ფურცლიანი მცენარე).

დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი ***ცალსახად*** ჩაიწერება ისეთი ფიბონაჩის რიცხვების ჯამის სახით, რომ ამ რიცხვებს შორის არ შეგვხვდება მეზობელი ფიბონაჩის რიცხვები.
მაგალითად, $n = 67$ შემდეგნაირად წარმოდგება: $67 = 1+3+8+55$ და ეს წარმოდგენა ერთად-ერთია (მართალია, $67 = 1+3+8+21+34$, მაგრამ აქ 21 და 34 მეზობელი რიცხვებია ფიბონაჩის მიმდევრობაში, რაც პირობას ეწინააღმდეგება).
ასეთი ცალსახა ჯამი წარმოშობს ფიბონაჩის რიცხვების მიმდევრობას, ანუ კოდს, რომელიც ცალსახად განსაზღვრავს ამ რიცხვს და კოდირების თეორიასა და პრაქტიკაში გამოიყენება.

ფიბონაჩის მიმდევრობის გამოყენებით გადაჭრილი იქნა მეოცე საუკუნის დასაწყისში უდიდესი გერმანელი მათემატიკოსის დავით ჰილბერტის მიერ დასმული ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანა.

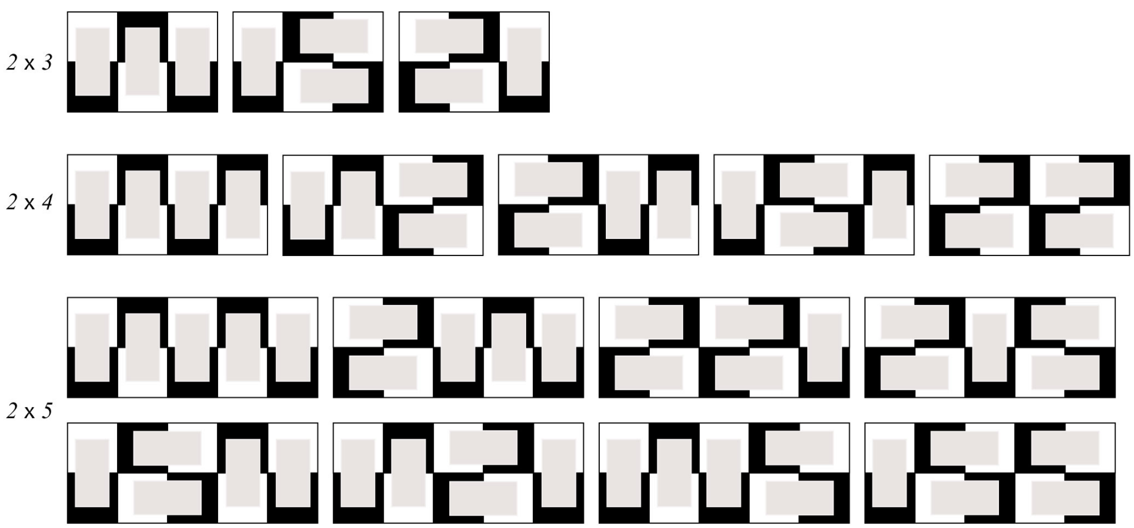
საინტერესოა ამ რიცხვების გამოყენება კომბინატორიკაში.
განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: მოცემულია n საფეხურიანი კიბე. თუ ჩვენ კიბის ავლა შეგვიძლია ისე, რომ თითო ნაბიჯში ერთ ან ორ საფეხურს ავდივართ, კიბის ავლის რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს ?
ცხადია, თუ $n = 1$, ჩვენ კიბის ავლის ერთად-ერთი საშუალება გვექნება. თუ $n = 2$, მაშინ გვექნება ორი შესაძლებლობა: ან თითო-თითო კიბის ავლის, ან ერთ ჯერზე ორის. $n = 3$ შემხვევაში გვექნება 3 შესაძლებლობა: 1+1+1 ან 1+2 ან 2+1. $n = 4$: 1+1+1+1 ან 1+1+2 ან 1+2+1 ან 2+1+1 ან 2+2, სულ 5 შესაძლებლობა.
თუ G_n აღნიშნავს n საფეხურიანი კიბის ზემოთ მოყვანილი პირობით ავლის ვარიანტების რაოდენობას, მაშინ შეიძლება G_{n+1} რიცხვის გამოთვლა შემდეგი ანალიზის საფუძველზე: თუ მოცემულია $n+1$ საფეხურიანი კიბე, ჩვენ შეგვიძლია ჯერ ავიაროთ ერთი საფეხური და მერე n საფეხური G_n სხვადასხვა მეთოდით, ან ჯერ ავიაროთ 2 საფეხური და შემდეგ $n-1$ საფეხური G_{n-1} სხვადასხვა მეთოდით. აქედან გამომდინარე, ვიღებთ ფორმულას

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1},$$

რაც ფიბონაჩის მიმდევრობის განმსაზღვრელი რეკურსიული ფორმულაა. განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ ამ მიმდევრობების პირველი და მეორე ელემენტი ფიბონაჩის მიმდევრობის მეორე და მესამე ელემენტების ტოლია. აქედან გამომდინარე ვიღებთ:

$$G_n = F_{n+1}.$$

მეორე ამოცანად შეიძლება ჭადრაკის დაფის დომინოს ქვებით გადაფარვის ამოცანა მოვიყვანოთ:
მოცემულია ჭადრაკის დაფის ფრაგმენტი ზომით $2 \times n$ და n ცალი დომინოს ქვა, რომელთა შორის თითო 2 კვადრატს ფარავს. რამდენი სხვადასხვა მეთოდით შეიძლება n ქვით $2 \times n$ ზომის ფრაგმენტის დაფარვა? ქვედა ნახატში მოყვანილია ამონახსნები 2×3, 2×4 და 2×5 ზომისათვის.



ნახ. 28: ჭადრაკის დაფის ფრაგმენტის გადაფარვა

<u>სავარჯიშო 3.13:</u> დავუშვათ, $2 \times n$ ფრაგმენტის გადაფარვა P_n ცალი სხვადასხვა მეთოდით შეიძლება (ზემოთ მოყვანილი ნახატიდან ჩანს, რომ $P_3 = 3$, $P_4 = 5$ და $P_5 = 8$). რა სახის რეკურსიული ფორმულით აღიწერება P_n? რა კავშირშია ეს მიმდევრობა ფიბონაჩის რიცხვებთან?

აქვე შეგვიძლია ჩამოვთვალოთ ფიბონაჩის მიმდევრობის რამოდენიმე თვისება:

- $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;
- F_{3n} ლუწია;

- F_{5n} იყოფა 5-ზე;
- $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;
- $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$;
- $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$;
- $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$;

სავარჯიშო 3.14: მათემატიკურ ინდუქციაზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ ზემოთ მოყვანილი ტოლობები.

უფრო რთულად დასამტკიცებელი ფაქტებია:

- თუ $n > 4$ და F_n მარტივია, მაშინ n მარტივია (შებრუნებული გამონათქვამი არ არის ჭეშმარიტი: $\exists p$ მარტივი რიცხვი ისეთი, რომ F_p არაა მარტივი);
- თუ $n, m \in \mathbb{N}$ და $gcd(m, n)$ ამ ორი რიცხვის უდიდეს საერთო გამყოფს აღნიშნავს, მაშინ $gcd(F_m, F_n) = F_{gcd(m,n)}$
- $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$;
- $F_{(k+1)n} = F_{n-1}F_{kn} + F_nF_{kn+1}$;
- $F_n = F_lF_{n-l+1} + F_{l-1}F_{n-1}$;
- $F_n = F^2_{(n+1)/2} + F^2_{(n-1)/2}$, თუ n კენტია;
- $F_n = F^2_{n/2+1} + F^2_{n/2-1}$, თუ n ლუწია;

ღია საკითხი: შეგვხვდება თუ არა ფიბონაჩის მიმდევრობაში უსასრულოდ ბევრი მარტივი რიცხვი?

სავარჯიშო 3.15: რისი ტოლია $gcd(46368, 21)$?

სავარჯიშო 3.16: დაწერეთ ალგორითმი, რომელიც მოცემული რიცხვისათვის გაარკვევს, არის თუ არა იგი ფიბონაჩის რიცხვი.

ბუნებრივად ისმის შემდეგი საკითხი: რამდენ ბიჯში შეიძლება გამოვითვალოთ F_n ზემოთ მოყვანილი რეკურსიული ფორმულის მეშვეობით?

სავარჯიშო 3.17: გამოითვალეთ $T(F_n)$ (ზემოთ მოყვანილი F_n რიცხვის გამოთვლისათვის საჭირო ბიჯების რაოდენობა).

ცხადია, რომ უფრო მოსახერხებელი იქნებოდა ფიბონაჩის რიცხვების არარეკურსიული ფორმულით გამოანგარიშება. მაშინ მის გამოთვლას არც თუ ისეთ დიდ დროს მოვანდომებდით. და მართლაც, ასეთი წარმოდგენა არსებობს:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

სავარჯიშო 3.18: მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ ამ ფორმულის სისწორე.

სავსებით ლოგიკურია შემდეგი შეკითხვა: როგორ შეიძლება ამ ფორმულის გამოყვანა? რა გზით მიაგნო ვინმემ ასეთ რთულ ფორმულას?
პირველ რიგში საჭიროა მიმდევრობის რიცხვების დაკვირვება. ერთი შეხედვით, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ კანონზომიერების გარდა აქ არაფერი ჩანს:

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, \dots$

მაგრამ თუ მეზობელ რიცხვებს ერთმანეთს შევუფარდებთ, შეიძლება დამატებითი კანონზომიერება დავინახოთ:

$T_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} \quad (n > 1)$:

$T_2 = \frac{1}{1} = 1;$	$T_3 = \frac{2}{1} = 2;$	$T_4 = \frac{3}{2} = 1,5;$	$T_5 = \frac{5}{3} \approx 2,666667;$
$T_6 = \frac{8}{5} = 1,6;$	$T_7 = \frac{13}{8} = 1,625;$	$T_8 = \frac{21}{13} \approx 1,615;$	$T_9 = \frac{34}{21} \approx 1,619;$
$T_{10} = \frac{55}{34} \approx 1,6176;$	$T_{11} = \frac{89}{55} \approx 1,618;$	$T_{12} = \frac{144}{89} \approx 1,61798;$	$T_{13} = \frac{233}{144} \approx 1,61805;$
$T_{14} = \frac{377}{233} \approx 1,618026;$	$T_{15} = \frac{610}{377} \approx 1,618037;$	$T_{16} = \frac{987}{610} \approx 1,618033;$	$T_{17} = \frac{1597}{987} \approx 1,618034;$
$T_{18} = \frac{2584}{1597} \approx 1,618034;$	$T_{19} = \frac{4181}{2584} \approx 1,618034;$	$T_{20} = \frac{6765}{4181} \approx 1,1,6180339887;$	$T_{21} = \frac{10946}{6765} \approx 1,1,6180339887;$
$T_{22} = \frac{17711}{10946} \approx 1,6180339887;$	$T_{23} = \frac{28657}{17711} \approx 1,6180339887;$	$T_{24} = \frac{46368}{28657} \approx 1,6180339887...$	

ამ რიცხვებს რომ დავაკვირდეთ, შევამჩნევთ, რომ T_n, ანუ ფიბონაჩის მეზობელი რიცხვების ერთმანეთთან შეფარდება, ერთი რიცვისკენ მიისწრაფვის. მართლაც, დამტკიცებულია, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi \approx 1,6180339887.$$

აქ $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ე.წ. ოქროს კვეთაა.

ჩვენს შემთხვევაში ეს იმას ნიშნავს, რომ დაწყებული რაღაცა ადგილიდან, ფიბონაჩის მიმდევრობა ***გეომეტრიული პროგრესიის*** თვისებებს ავლენს. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ არსებობს ისეთი მიმდევრობა

$$G_n = c \cdot q^n,$$

რომელიც ემთხვევა ფიბონაჩის მიმდევრობას (დაწყებული რაიმე ადგილიდან მაინც) რაღაცა $c, q \in \mathbb{N}$ რიცხვებისათვის. მაგრამ როგორ უნდა შევარჩიოთ c და q?

რა თქმა უნდა, თვით $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფიბონაჩის მიმდევრობის თვისებას:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}.$$

აქედან გამომდინარე,

$$c \cdot q^n = c \cdot q^{n-1} + c \cdot q^{n-2}$$

და, შესაბამისად, თუ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $c \cdot q^{n-2}$ სიდიდეზე, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას, რომლითაც q პარამეტრის დადგენას შევძლებთ:

$$q^2 = q + 1.$$

ამ კვადრატული განტოლების ამონახსნებია

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{და} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

აქედან გამომდინარე, ვიღებთ ორ მიმდევრობას

$$G'_n = c \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{და} \quad G''_n = c \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

სადაც ორივე ფიბონაჩის პირობას აკმაყოფილებს.
დარჩა მხოლოდ ამ ორი მიმდევრობიდან ერთ-ერთისა ან მათი კომბინაციის ამორჩევა და c პარამეტრის დადგენა ისე, რომ მიღებული მიმდევრობა ფიბონაჩის $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობას დაემთხვას.

განვიხილოთ მიმდევრობა G'_n. თუ $n = 1$, ვიღებთ: $G'_1 = c \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ და, აქედან გამომდინარე, რადგან ჩვენ გვინდა, რომ $G'_n = F_n = 1$, ვიღებთ:

$$c \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.$$

ესე იგი, $c = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$. მაგრამ ამ შემთხვევაში $G'_2 = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \neq F_2 = 1$. ასე რომ, $(G'_n)_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა ცალკე აღებული ფიბონაჩის მიმდევრობას ვერ დაემთხვევა.

<u>სავარჯიშო 3.19:</u> ანალოგიური მსჯელობით აჩვენეთ, რომ არც მიმდევრობა $(G''_n)_{n=1}^{\infty}$ დაემთხვევა ფიბონაჩის მიმდევრობას.

ახლა განვიხილოთ მიმდევრობა

$$H_n = G'_n - G''_n = c \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

<u>სავარჯიშო 3.20:</u> დაამტკიცეთ, რომ ზემოთ მოყვანილი მიმდევრობა $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ ფიბონაჩის პირობას აკმაყოფილებს.

<u>სავარჯიშო 3.21:</u> განიხილეთ მიმდევრობა $H'_n = G'_n + G''_n$. აკმაყოფილებს თუ არა იგი ფიბონაჩის პირობას?

ცხადია, $H_0 = 0$ და ამით ამ მიმდევრობის ნულოვანი წევრი ფიბონაჩის მიმდევრობის ნულოვან წევრს ემთხვევა. ახლა კი განვიხილოთ H_1:

$$H_1 = c \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

რადგან ჩვენ გვინდა, რომ ეს წევრი ფიბონაჩის მიმდევრობის პირველ წევრს დაემტხვას, ვიღებთ განტოლებას:

$$H_1 = c \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 1.$$

c ცვლადის მიმართ ამ განტოლების ამოხსნის შემდეგ ვიღებთ: $q = \frac{1}{\sqrt{5}}$. აქედან გამომდინარე,

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

რადგან მიმდევრობა $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ აკმაყოფილებს ფიბონაჩის პირობას და მისი პირველი ორი წევრი ფიბონაჩის მიმდევრობის პირველი ორი წევრის ტოლია, ეს ორი მიმდევრობა მთლიანად დაემთხვევა ერთმანეთს:

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

 რ. დ. გ.